

# Des nœuds en mathématiques

«du nœud gordien à la molécule d'ADN»

Jérôme Dubois

Institut de Mathématiques de Jussieu  
Université Denis Diderot — Paris 7

# Alexandre le Grand et le nœud gordien (333 av. JC)



«*Alexandre tranchant le nœud gordien*» par Jean Simon Berthélemy, Paris

Alexandre le Grand fondateur de la théorie des nœuds ?  
non il faudra attendre 22 siècles...

«A qui saurait défaire le nœud gordien, une vieille prophétie promettait l'empire du monde»  
Ernst Jünger, «*le nœud gordien*»

# les nœuds : symboles mystiques et religieux



salamandre couronnée à queue nouée,  
hommage à François 1er, Riom tour de l'horloge



Saint Georges terrassant le dragon,  
Blassac fresque XIVE



Détail d'une litre funèbre,  
Lavaudieu fresque XVe



mosaïque romaine II-IIIe

qu'est-ce qu'un nœud en mathématiques ?

1. qu'est-ce qu'un nœud au sens mathématique ?
2. quand dit-on qu'un nœud est «réellement» noué ?
3. quand dit-on que deux nœuds sont les mêmes ?

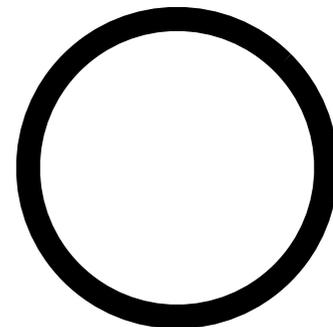
# qu'est-ce qu'un nœud en mathématiques ? de la réalité à l'idée...

Un nœud est ce que l'on obtient en prenant une ficelle (enchevêtrée) dont les extrémités ont été ressoudées.

C'est une **courbe fermée**, sans intersection, plongée dans l'espace tridimensionnel.

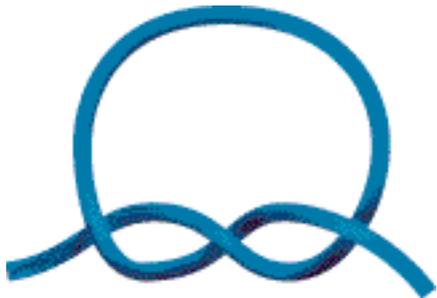
Une telle courbe peut posséder des **croisements**, passer par-dessous et par-dessus elle-même : il s'agit des lieux où la ficelle se chevauche.

un simple **cercle** est donc un nœud au sens mathématique : c'est le **nœud non noué**, appelé aussi **nœud trivial**.



# qu'est-ce qu'un nœud en mathématiques ?

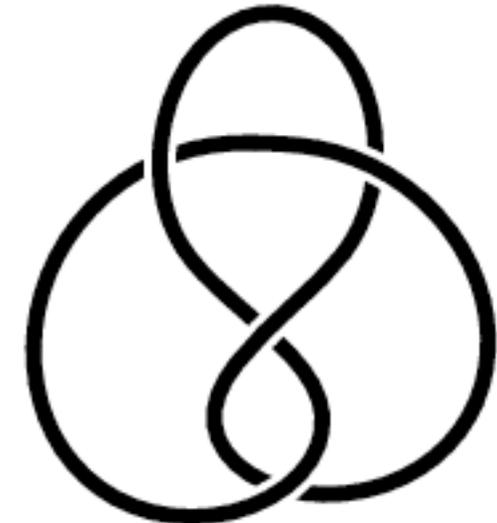
nœud «concret»



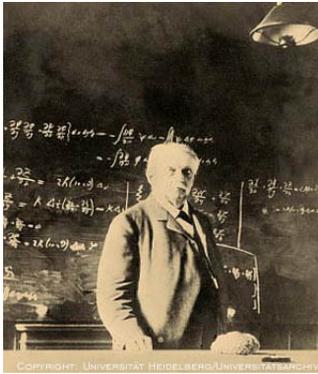
nœud de trèfle

nœud en huit

nœud «abstrait»  
ou  
diagramme de nœud



# la naissance de la théorie des nœuds : Helmholtz, Kelvin, Tait et les tourbillons



Théorème de Helmholtz-Kelvin : dans un fluide parfait, le tourbillon est transporté par le flot.



# la naissance de la théorie des nœuds : Kelvin et la classification de la matière

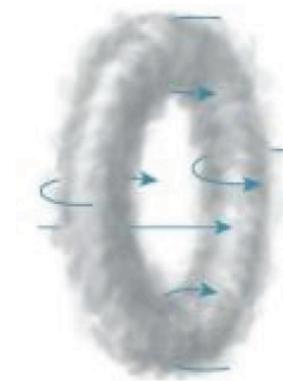
La théorie des «atomes-tourbillons» comme «modèle» de la matière...

*le type de nœud conditionne le type d'atome* entrelacs de Hopf

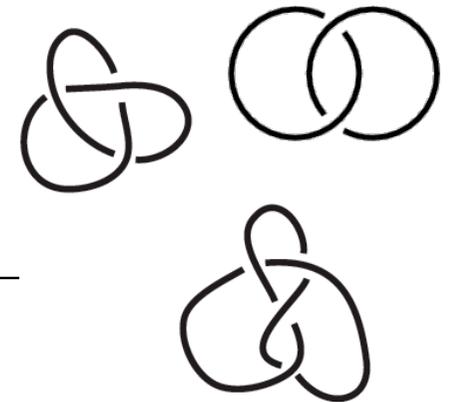
spectre du sodium



spectre de l'élément associé



«atomes-tourbillons»



nœuds

observations

réalité physique

idée - concept

selon Kelvin, comprendre la matière, c'est-à-dire les différents atomes de la nature, revient donc à comprendre les «différents» types de nœuds possibles :

la classification des nœuds expliquerait pourquoi les atomes absorbent et émettent de la lumière seulement pour certaines longueurs d'onde.

# la naissance de la théorie des nœuds :

## Lord Kelvin et la classification de la matière

Mendeleïev donne en 1869 la première classification périodique des éléments telle qu'on la connaît toujours aujourd'hui...

... la théorie des «atomes-tourbillons» deviendra caduque suite à la série d'expériences de Michelson-Morley entre 1881-1887



©Beverly/Vallet

Groupes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Période 1	1 H																	2 He
Période 2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
Période 3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
Période 4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
Période 5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
Période 6	55 Cs	56 Ba	57* La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
Période 7	87 Fr	88 Ra	89** Ac	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt	110 Uun	111 Uuu	112 Uub		114 Uuq		116 Uuh		118 Uuo

- Non métalliques
- Gaz rares
- Métaux alcalins
- Métalloïde
- Métaux alcalino-terreux
- Halogènes
- Métaux de transition
- Autres métaux
- Terres rares

\*Lanthanides

58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

\*\*Actinides

90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr
----------	----------	---------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	-----------	-----------	-----------	-----------

# à quoi s'intéresse-t-on en théorie des nœuds ?

La théorie des nœuds est une branche de la topologie, discipline qui s'intéresse aux objets géométriques d'un point de vue qualitatif plus que quantitatif.

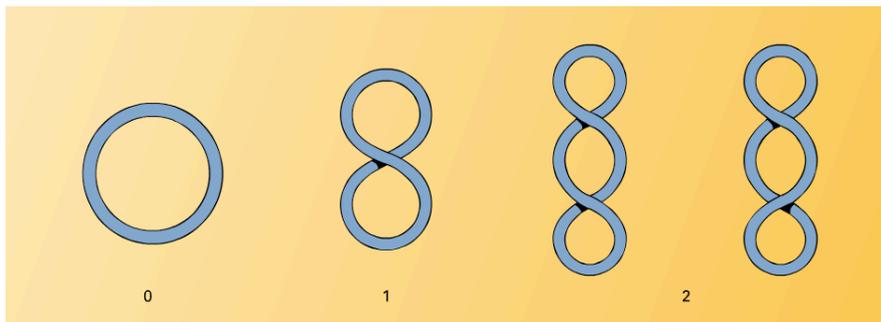
On ne s'intéresse ici ni à la longueur de la ficelle nouée, ni à son épaisseur, mais seulement à sa «forme», au «type» de nœud qu'elle représente dans l'espace, c'est-à-dire aux propriétés géométriques intrinsèques de l'objet sous l'action de déformations continues, excluant coupures et déchirures.

# comment classer les nœuds ?

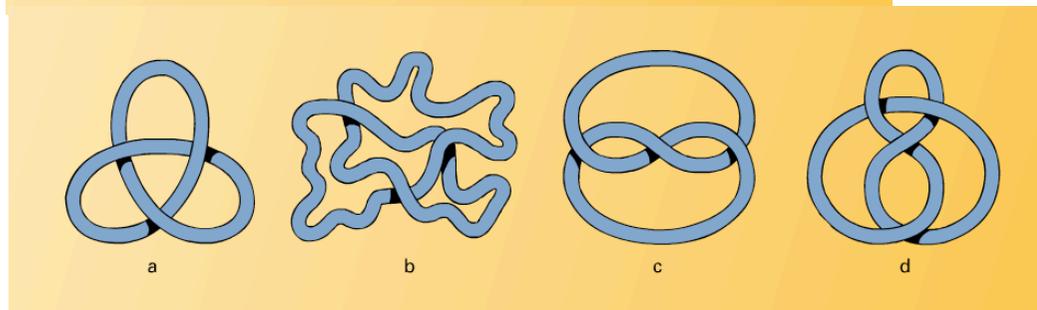
## l'équivalence des nœuds

Si l'on tire ou si l'on tord la ficelle sans la rompre, on change l'«aspect» du nœud mais on ne change pas le «type» du nœud (i.e. ses caractéristiques intrinsèques).

Deux nœuds sont **équivalents** lorsque l'on peut amener la ficelle de l'un sur celle de l'autre par déformation continue sans coupure ni déchirure.



le nœud trivial



les nœuds de trèfle et de huit

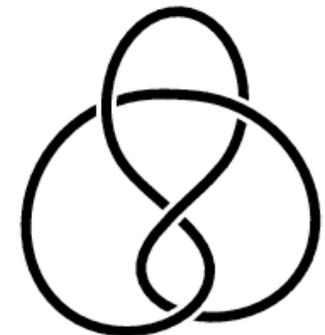
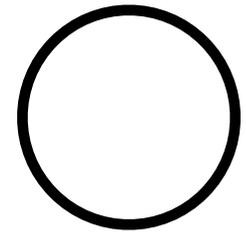
# comment classer les nœuds ?

## l'équivalence des nœuds

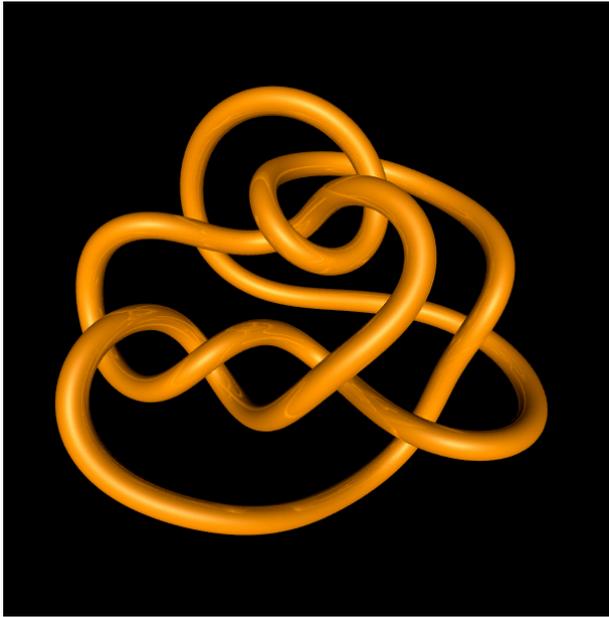
Un nœud n'est pas «réellement noué» s'il est équivalent au nœud trivial. Le nœud trivial n'a aucun croisement.

Le nœud de trèfle est le «premier» nœud réellement noué, au sens où il n'est pas équivalent au nœud trivial, il possède 3 croisements.

Le nœud de huit est aussi un nœud réellement noué, il possède 4 croisements.



un «nœud gordien» ?  
ce nœud est-il noué ?

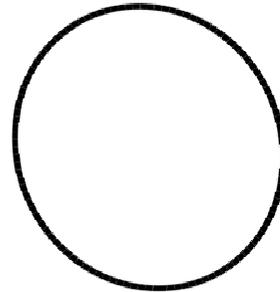
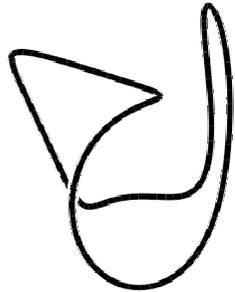
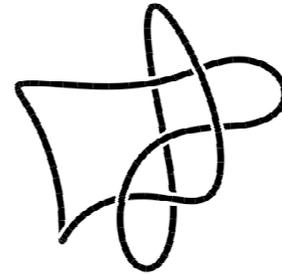
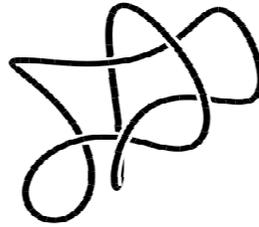
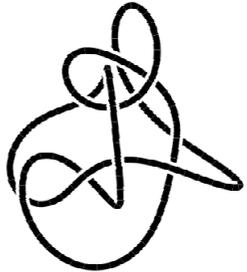
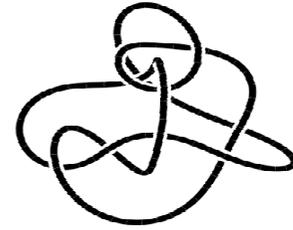
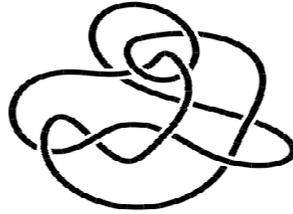
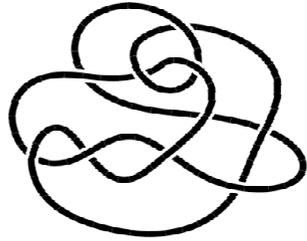
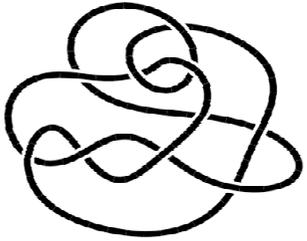


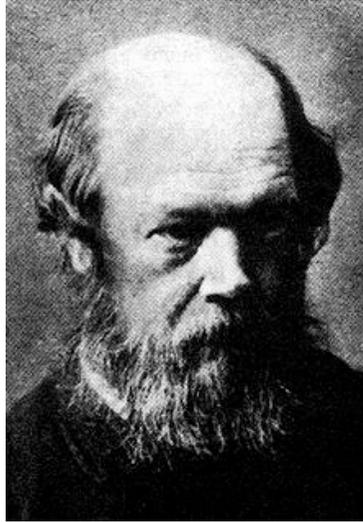
=



?

un nœud gordien ?  
réponse en images...





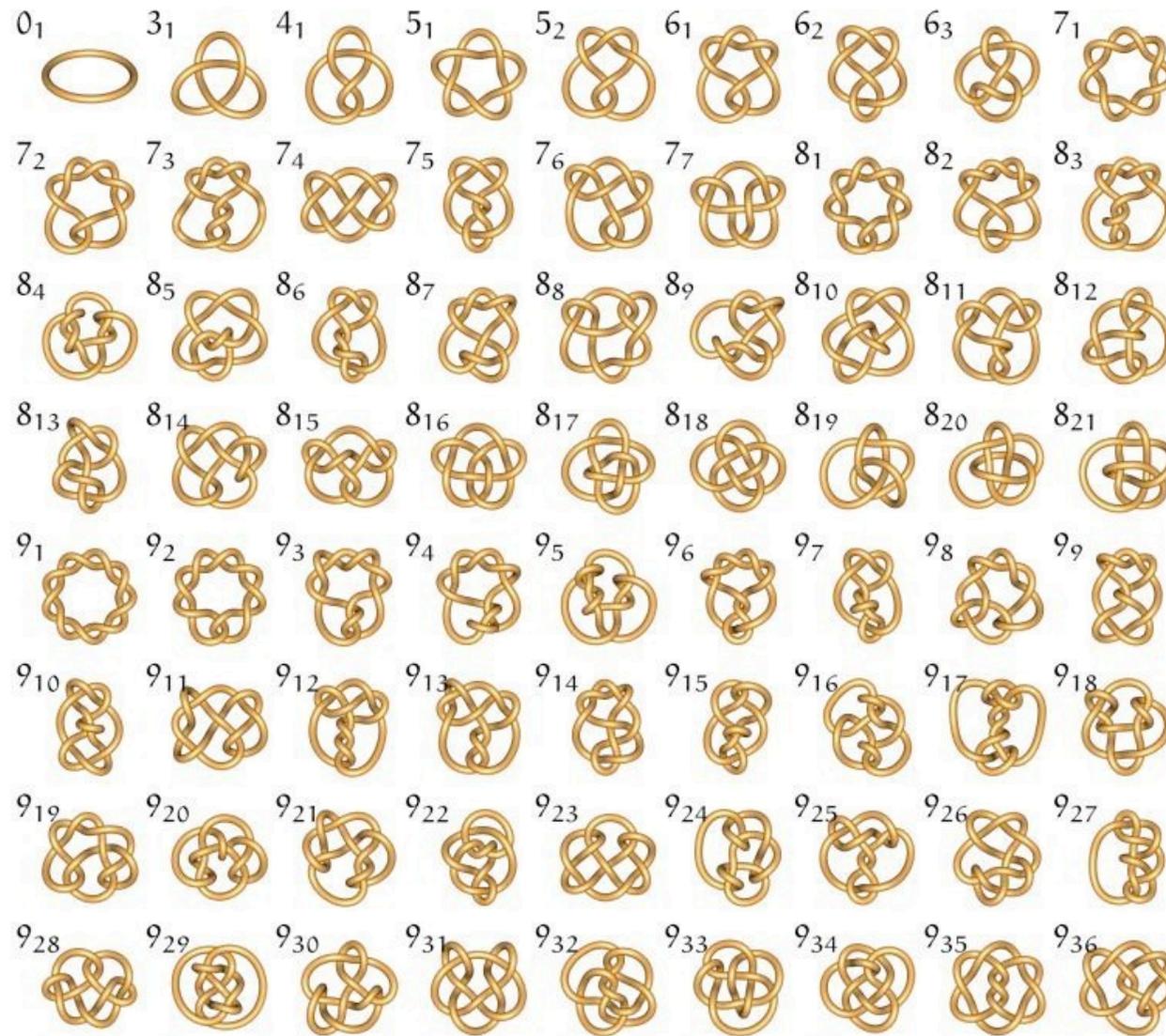
## P. Tait : le taxinomiste

A partir du milieu du XIXe siècle, le physicien écossais Peter Tait, collaborateur de Kelvin, s'est lancé dans la **classification des noeuds** d'une manière empirique. Il y consacra une vingtaine d'années de sa vie.

En 1877, il aboutira à une première classification pour les nœuds ayant moins de 9-10 croisements (avec une unique erreur).



# Tait le taxinomiste : un zoo de nœuds (1877)



# comment classer les nœuds ?

## la notion d'invariant

Un invariant est une quantité qui ne change pas lorsque l'on fait subir au noeud une déformation continue sans coupure ni déchirure.

On peut affirmer que deux noeuds sont différents quand l'évaluation d'un invariant sur ces deux noeuds ne donne pas le même résultat.

La réciproque ne disant évidemment rien...

Un invariant peut être un nombre (entier, réel etc...), un polynôme (polynôme d'Alexander, polynôme de Jones etc...), un objet algébrique (tel qu'un groupe, un module etc...).

Moralement, la donnée d'un invariant va permettre de faire des calculs numériques ou algébriques pour distinguer les nœuds entre eux.

Exemple : “L'ordre” d'un noeud est le nombre *minimal* de **croisements** parmi toutes ses représentations possibles (i.e. tous ces diagrammes).

C'est cet invariant que Tait utilise pour donner la première classification.

# nombre de nœuds différents

Tait-Little ; Hoste-Morven-Thistlethwaite-Weeks

ordre	nombre
3	1
4	1
5	2
6	3
7	7
8	21
9	49
10	165
11	552
12	2176
13	9988
14	46972
15	253293
16	?

# le nœud de trèfle est noué



En 1963, Richard Fox définit un invariant très simple : la «**tricolorabilité**».

On dit que le diagramme d'un nœud (i.e. une représentation dans le plan) est «**tricolorable**» si l'on peut le colorier en utilisant **3 couleurs** et en respectant les règles suivantes :

1. chaque brin (portion de ficelle comprise entre deux croisements consécutifs) doit être colorié d'une seule couleur ;
2. lorsqu'un brin passe au dessus d'un croisement, le brin qui le prolonge est de même couleur ;
3. à chaque croisement, soit on voit les 3 couleurs, soit une seule ;
4. au moins 2 des 3 couleurs sont utilisées pour colorier le nœud.

# le nœud de trèfle est noué

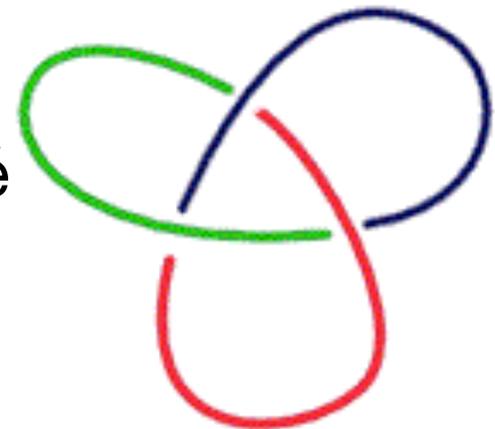
Fox a démontré que la propriété de «tricolorabilité» est un invariant : autrement dit, soit tous les diagrammes du nœud sont tricolorables, soit aucun ne l'est.

Cet invariant scinde donc les nœuds en 2 classes et pour l'établir il suffit de travailler sur un diagramme particulier.

Exemple : le nœud trivial n'est pas tricolorable puisqu'il peut être représenté à l'aide d'un diagramme sans croisement.

Exemple : le nœud trivial n'est pas tricolorable puisqu'il peut être représenté à l'aide d'un diagramme sans croisement.

En conclusion : le nœud de trèfle est «vraiment» noué



# comment classer les nœuds ? la notion d'invariant (suite)

La recherche d'un invariant complet «facilement» calculable est la quête ultime.

Le polynôme d'Alexander (1923) n'est pas un invariant complet : il ne permet pas de distinguer le nœud de trèfle de son image miroir.



Pire, il existe des nœuds noués ayant un polynôme d'Alexander égal au polynôme du nœud trivial.



# la molécule d'ADN

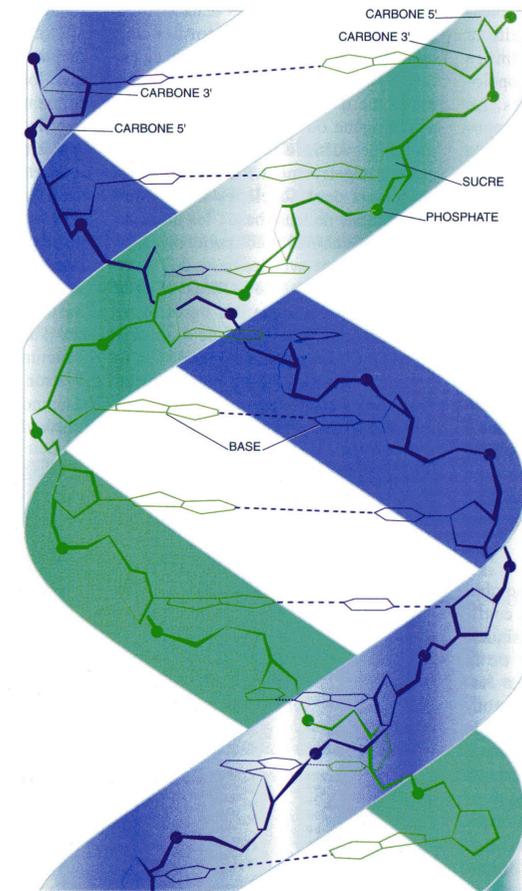
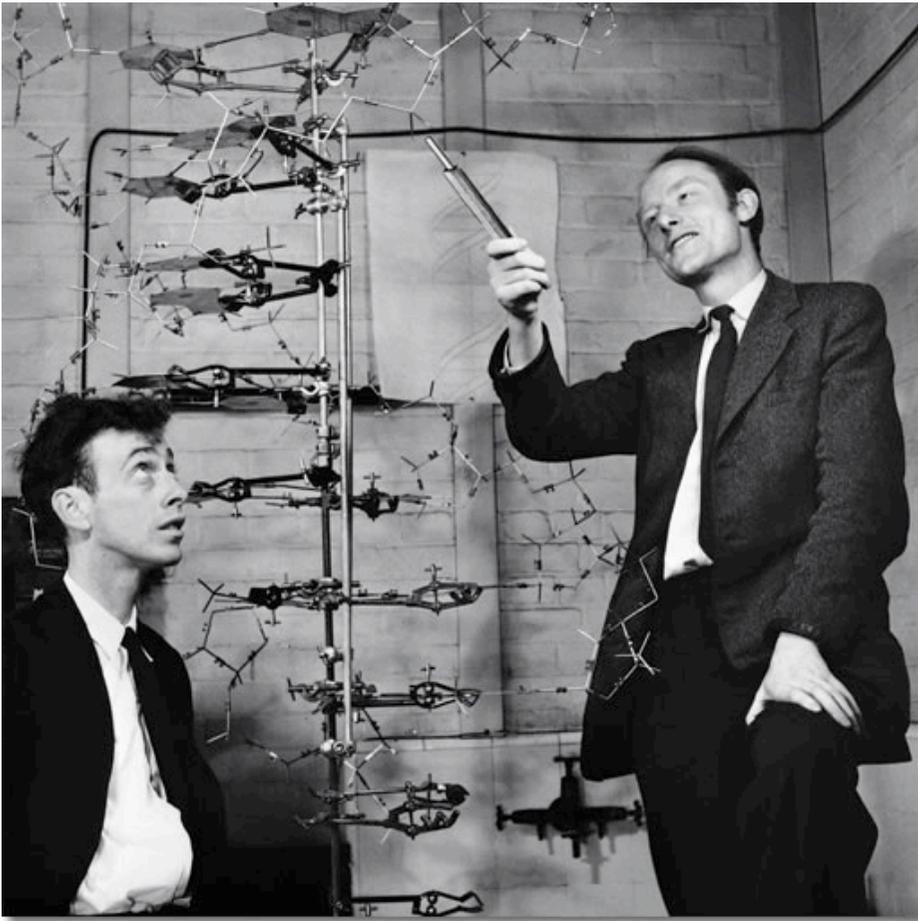
En 1953, F. Crick (à droite) et J. Watson (à gauche) ont découvert que l'ADN est une longue double hélice qui forme une structure hélicoïdale et peut mesurer plusieurs centimètres (chromosome 1 humain : 8 cm).

A côté de l'ADN linéaire (i.e. à brin(s) libre(s)), les biologistes ont aussi identifié de l'ADN circulaire (i.e. à brin(s) fermé(s)).

L'hypothèse d'alors : seule l'enchaînement des bases, qui portent l'information génétique, compte indépendamment de la façon dont la molécule est tortillée, emmêlée, ou nouée, c'est-à-dire indépendamment de sa topologie.

Mais à partir des années 70, on a commencé à s'interroger sur l'influence de la forme topologique de l'ADN.

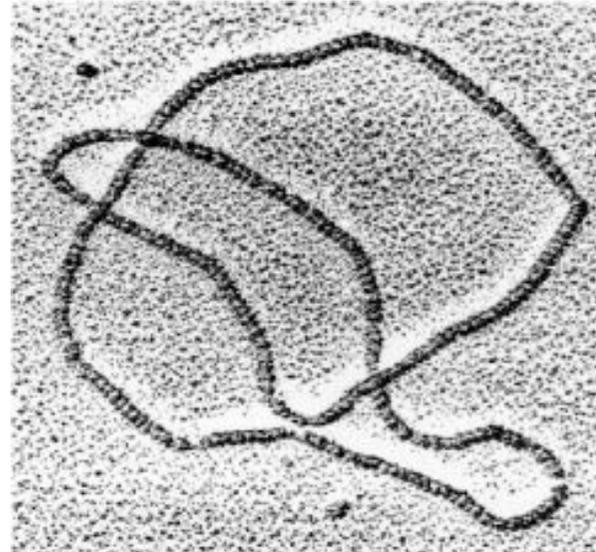
En 1971, J. Wang a mis en évidence que certaines enzymes - appelées topo-isomérases - peuvent modifier la structure de l'ADN en créant par exemple des nœuds ou en dénouant la molécule.



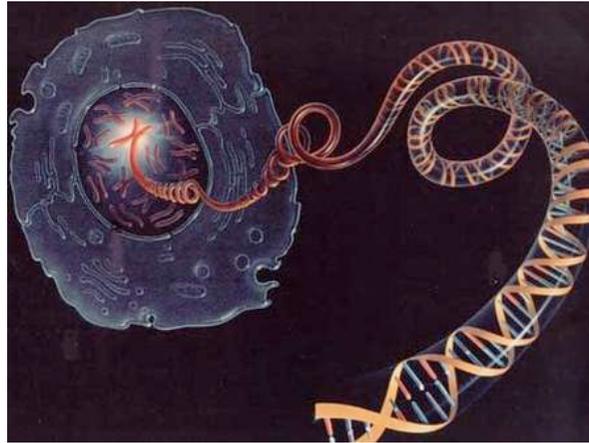
# ADN noué

On a constaté que le type de noeud formé par la molécule conditionne ses propriétés chimiques dans les cellules.

molécule d'ADN nouée vue au microscope électronique, 1985



# ADN surenroulé



Les topo-isomérases jouent un rôle capital dans les processus génétiques qui sont : la **réplication**, la **transcription** et la **recombinaison** de l'ADN.

La structure de l'ADN est déterminée par un mécanisme enzymatique, dans quelle mesure la classification mathématique des nœuds permet-elle de remonter aux mécanismes enzymatiques en jeu ?

# des tourbillons dans l'atmosphère aux nœuds : l'attracteur de Lorenz

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = \sigma(y(t) - x(t)) \\ \frac{dy(t)}{dt} = \rho x(t) - y(t) - x(t)z(t) \\ \frac{dz(t)}{dt} = x(t)y(t) - \beta z(t) \end{cases}$$

représentation de l'attracteur de Lorenz (1963) :  
système différentiel non linéaire

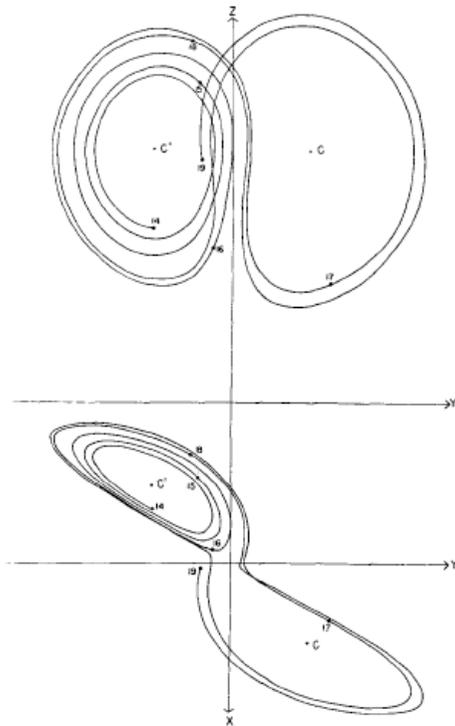
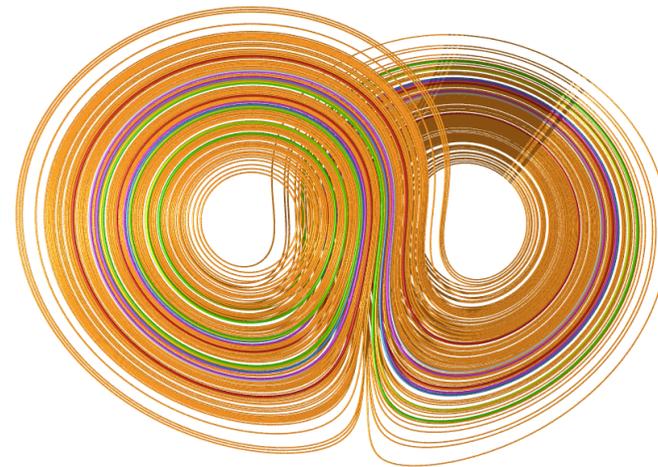


FIG. 2. Numerical solution of the convection equations. Projections on the  $X$ - $Y$ -plane and the  $Y$ - $Z$ -plane in phase space of the segment of the trajectory extending from iteration 1400 to iteration 1900. Numerals "14," "15," etc., denote positions at iterations 1400, 1500, etc. States of steady convection are denoted by  $C$  and  $C'$ .



# des tourbillons dans l'atmosphère aux nœuds : l'attracteur de Lorenz

quelques orbites périodiques dans l'attracteur de Lorenz.  
Birman et Williams (1983) ont l'idée de les voir comme des  
nœuds. Ils ont montré que parmi les 250 premiers nœuds,  
seuls 8 se réalisent comme orbites périodiques.

